1.5.2. Parametrelerin (Sabitlerin) Değişimi Yöntemi

Sabit katsayılı denklemlerde uygulandığı gibi $Ly=0$ homojen denkleminin $y_h = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$ çözümü bilindiğinde buradaki c_i sabitlerini değişken olarak kabul ederek sabitin değişimi yöntemi ile $Ly = B(x)$ homojen olmayan denklemin genel çözümü bulunur.

Örnek: $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ denkleminin homojen kısmına ait lineer bağımsız çözümler $y_1 = x$ ve $y_2 = e^x$ olduğuna göre genel çözümü bulunuz.

Denklem $Ly = B(x)$ formunda düzenlenirse

$$y'' - \frac{x}{x-1} y' + \frac{1}{x-1} y = x-1$$ olur.

Homojen kısmın genel çözümü $y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2$ den $y_h = c_1 x + c_2 e^x$ şeklindedir. Buradaki sabitleri değişken olarak kabul edersek özel çözüm $y_ö = c_1(x) x + c_2(x) e^x$ şeklinde (veya $y_ö = v_1(x) x + v_2(x) e^x$ formunda) sabitin değişimi ile aranırsa

$$\left.\begin{aligned} c_1' x + c_2' e^x &= 0 \\ c_1' 1 + c_2' e^x &= x-1 \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümünden

$$c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = \int -1\,dx \Rightarrow c_1(x) = -x \quad \text{olur.}$$

$$c_2' = x e^{-x} \Rightarrow c_2(x) = \int x e^{-x} dx \Rightarrow c_2(x) = -e^{-x}(x+1) \quad \text{olur}$$

O halde homojen olmayan kısmın özel çözümü

$$y_ö = c_1(x) \cdot x + c_2(x) \cdot e^x = -x \cdot x - e^{-x}(x+1) e^x$$

$$\Rightarrow y_ö = -x^2 - x - 1 \quad \text{olur.}$$

Verilen denklemin genel çözümü $y = y_h + y_ö$ den

$$y = c_1 x + c_2 e^x - x^2 - x - 1$$

olarak bulunur.

(*) Eğer $c_i(x)$ ler belirlenirken alınan integralde integral sabitleri de eklenirse yani

$$c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + C_1$$

$$c_2' = xe^{-x} \Rightarrow c_2(x) = -e^{-x}(x+1) + C_2$$

olarak alınırsa verilen denklemin genel çözümü

$$y = x \cdot c_1(x) + e^x c_2(x)$$

$$= x(-x + C_1) + e^x\left(-e^{-x}(x+1) + C_2\right)$$

$$= C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1$$

şeklinde de bulunabilir.